

УДК 539.386 (045)

С.М.Талах, канд. техн. наук  
К.І.Козловець, студентка**РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНИХ  
СТРИЖНЕВИХ СИСТЕМ З УРАХУВАННЯМ ДЕФОРМАЦІЙ ЗСУВУ**Національний авіаційний університет  
E-mail: [raa-nau@ukr.net](mailto:raa-nau@ukr.net); [svetlanatalah@gmail.com](mailto:svetlanatalah@gmail.com)

*Виконано розрахунок статично невизначеної рами з урахуванням деформації зсуву. Отримані функціональні співвідношення внутрішніх зусиль і деформацій за параметром зсуву та показані границі інтервалів впливу коефіцієнту зсуву для транстропних матеріалів, а також задані деякі рекомендації щодо використання низькомодульних матеріалів.*

**деформації зсуву, статично-невизначені системи, ортотропні матеріали, коефіцієнт зсуву.**

**Постановка проблеми**

У прикладних задачах будівельної механіки зазвичай розглядаються пружні однорідні ізотропні матеріали (тіла). У сучасній техніці крім ізотропних широкого використання набули конструктивно-анізотропні тіла. Майже всі реальні матеріали анізотропні і у більшій або меншій мірі неоднорідні, у тому числі і вироби зі сталі у залежності від технології виготовлення та форми лиття і прокату.

У даній роботі звертаємо увагу на конструктивні полімерні вироби з анізотропних матеріалів, які будуть підлягати силовим впливам – жорсткі склопластики, текстоліти, деревино-шаруваті і полістирольні плити та ін..

Полімерні матеріали наділені рядом позитивних якостей: низькою теплопровідністю, малою питомою вагою, високою міцністю, високим коефіцієнтом конструктивності тобто відношенням границі міцності до об'ємної ваги, хімічною стійкістю, гарною технологічністю та ін.. Використання анізотропних матеріалів дає можливість більш раціонально розміщувати матеріал у конструкції. Це досягається шляхом суміщення напряму великої міцності або жорсткості з напрямом найбільших напружень або переміщень, наприклад, використання ортотропних плит у мостобудуванні. У різних галузях промислового будівництва, літакобудуванні,

суднобудуванні та ін.. полімерні матеріали використовуються для виготовлення конструкцій у вигляді оболонок, пластин та стрижнів. Ці конструкції у більшості випадків є тонкостінними: вони більш економічні. Тонкостінні стрижні використовуються як шпангоути і стрингери у панелях, пластинах та оболонках несучих елементів будівель і споруд.

**Аналіз досліджень**

Дослідження багатьох авторів, у тому числі [2, 4], показали, що урахування деформацій зсуву істотно впливає на переміщення, особливо в статично невизначених системах і практично не впливає на кути повороту жорстких кутових елементів у рамах. Тонкостінні стрижні відносяться саме до статично невизначених механічних систем.

**Постановка завдання**

На прикладі урахування зсувних деформацій для статично невизначеної рами, отримаємо функціональні співвідношення внутрішніх зусиль і деформацій за параметром зсуву для транстропних матеріалів.

**Рекомендації щодо використання низькомодульних матеріалів**

Однорідне пружне анізотропне тіло у загальному випадку відповідно узагальненому закону Гука [1] характеризується 21 пружною незалежною сталою  $a_{ji}$  або  $A_{ij}$ . Симетрія внутрішньої будови матеріалу призводить до симетрії пружності. У тілі

з'являються симетричні напрямлення (конструктивно заплановані), вздовж яких пружні властивості будуть однаковими. Для таких матеріалів узагальнений закон Гука спрощується, кількість незалежних констант зменшується. Так наприклад, для тіла з однією площиною симетрії їх кількість буде становити 13 (такі тіла називаються неортотропними), а на випадок, коли у кожній точці тіла є 3 взаємно-перпендикулярні площини пружної симетрії кількість незалежних пружних сталих рівна 9-ти (такі тіла відповідно з [1] називають ортотропними). Якщо в кожній точці тіла є площина в якій пружні властивості у всіх напрямках однакові, а відрізняються тільки в ортогональному напрямі по відношенню до цієї площини ізотропії, то для таких тіл кількість незалежних пружних констант буде рівною 5-ти (такі тіла називають трансверсально ізотропними, або транс-тропними). На випадок повної симетрії, коли у кожній точці тіла будь-яка площина є площиною пружної симетрії, кількість пружних незалежних констант зводиться до 3-х –  $E, G, \nu$ : модуль пружності Юнга, модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона (такі тіла називають ізотропними). Прикладами матеріалів, які наближено можна вважати ортотропними, є деревина, фанера, деревинно-шаруватий пластик, текстоліт, склопластик типу СВМ та ін. Прикладом транс-тропного тіла може бути однонаправлений склопластик, якщо вважати, що нитки рівномірно розподілені у перерізі.

Пружні сталі ортотропного матеріалу у головних напрямках (коефіцієнти поздовжніх деформацій) можна визначити, виконавши один з дослідів на розтяг, стиснення або згин, при цьому вихідними рівняннями випробувань приймаються вирази узагальненого закону Гука для ортотропного матеріалу [1]. Модулі пружності, знайдені у результаті окремих досліджень практично співпадають, тобто метод визначення пружних сталих різномодульних матеріалів з дослідів на згин може бути використаним у лабораторній практиці [2].

Коефіцієнти поперечних деформацій ортотропних матеріалів можна також визначати при випробуваннях на розтяг, стиснення та згин, вибравши з досліджуваного матеріалу три зразка у вигляді призм прямокутного перерізу, які орієнтовані по головним напрямкам базису ортотропії, коефіцієнти Пуассона визначаються як відношення поперечної відносної деформації до поздовжньої [2]. У окремих випадках анізотропії – ізотропного, поперечно ізотропного (трансверсального), ортотропного або з однією площиною пружної симетрії матеріалу зразка, гіпотеза плоских перерізів при чистому згині є справедливою, проте у загальному випадку анізотропії ця гіпотеза стає несправедливою і вказані способи визначення пружних властивостей матеріалів використовувати не можна.

З метою визначення коефіцієнтів зсуву з ортотропного матеріалу, що досліджується, виготовляють три діагональні зразка прямокутного перерізу, при цьому вісь зразка першого типу (вздовж першої головної осі ортотропії) [2] паралельна головній площині пружності і в той же час становить кут  $45^\circ$  до головного напрямку пружності матеріалу. З досліду розтягу (стиснення) цього зразка першого типу визначають коефіцієнти поздовжніх і поперечних деформацій, а сталу зсуву у площині 1 – 2 обчислюють як їх подвійну різницю, що еквівалентна формулі зсуву для цієї площини

$$G_{12} = \frac{E_{45}}{2(1 + \nu_{45})}$$

де  $E_{45}, \nu_{45}$  - модулі Юнга і коефіцієнт Пуассона, знайдені в результаті дослідження зразка першого типу. Аналогічно при дослідженні зразків II і III типів (вздовж 2 і 3-ої головних осей ортотропії) знаходять коефіцієнти деформації і модулі зсуву відповідно  $a_{44} (G_{22})$  і  $a_{55} (G_{12})$ .

У будівельній механіці пружні переміщення стрижня і стрижневих систем частіше визначають способом Максвелла-

Мора, при якому будь-яке (узагальнене) переміщення  $\delta_{ij}$  за напрямом  $i$ , визване причиною  $j$ , виражається віртуальною роботою внутрішніх сил. Загальна формула для тонкостінного стрижня містить 30 інтегралів, до того ж 5 з них визначають переміщення тонкостінного стрижня без урахування деформацій зсуву, всі інші від зсуву. Для перерізу симетричного відносно обох головних осей з десяти коефіцієнтів зсуву  $\mu_{ij} = \mu_{ji}$  шість рівні нулю. Коефіцієнти зсуву, як правило, обчислюються відносно головних координат  $x$ ,  $y$ ,  $w$  і залежить від форми і розмірів перерізу. Для прямокутного перерізу коефіцієнт зсуву  $\mu_{xx} = 1,2$ , для симетричного двотавра з однорідного матеріалу, утвореного з вузьких прямокутників, зображеного на рис. 1 становить:

$$\mu_{xx} = \frac{Fb_2^2}{120I_x^2} \left[ \frac{5b_1^3h_1^2}{h_1} + \frac{b_2}{h_2} (30b_1^2h_1^2 + 10b_1h_2 \times \right. \\ \left. \times h_1h_2 + b_2^2h_2^2) \right]; \\ \mu_{yy} = \frac{3F}{5b_1h_1}; \quad \mu_{ww} = \frac{2,4F^2}{h_1b_1b_2^2}.$$

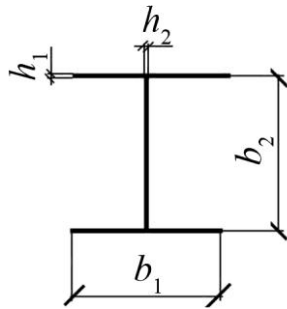


Рис.1. Переріз двотавра

При проектуванні комбінованих великопрогонових оболонкових систем складної конфігурації для забезпечення місцевої стійкості тонколистових фрагментів широко використовуються ребра (шпангоути, стрингери) вставки та інші стабілізуючі елементи з комбінації тонкостінних прокатних і гнутих (закритих і відкритих перерізів) профілів [3]. У загальній дискретній моделі та розрахунковій схемі цих комбінованих механічних систем названі

тонкостінні стрижневі елементи приводяться до еквівалентних прямокутних перерізів з адекватними поздовжньою та згинальною жорсткостями. У результаті розрахунків на міцність комбінованої оболонкової конструкції на основі чисельного ітераційного процесу нелінійного деформування ми отримуємо інтегральне внутрішнє зусилля (поздовжні і поперечні сили, поперечні, тангенціальні, поздовжні та крутні моменти), що діють в елементах ребер та стабілізуючих елементах комбінованої механічної системи. Проте внутрішні напруження в еквівалентних дискретних системах, що відповідають інтегральним внутрішнім зусиллям, абсолютно не відповідають дійсним нормальним та зсувним напруженням у дійсних профілях реальних тонкостінних стрижневих елементах і тому для забезпечення обмежень за міцністю та деформативністю, для перерізів з максимальними інтегральними зусиллями, необхідно розв'язувати задачу статички невизначених тонкостінних стрижнів, підставляючи до формули Максвелла-Мора з урахуванням зсувних інтегралів дійсні внутрішні зусилля з визначенням коефіцієнтів зсуву, і як наслідок, дійсних деформацій та зусиль. У зв'язку з цим у запропонованій роботі проведені дослідження для статично невизначених рам з тонкостінних профілів або для прямокутних і двотаврових перерізів з низькомодульних матеріалів, наприклад, з склеєної деревини.

### Розрахунок рами з урахуванням зсуву

Розрахунки стрижня рами  $ab$  (рис. 2) з урахуванням деформації зсуву у загальному випадку завантаження виконані професором Н.В. Корноуховим [4], мають вигляд:

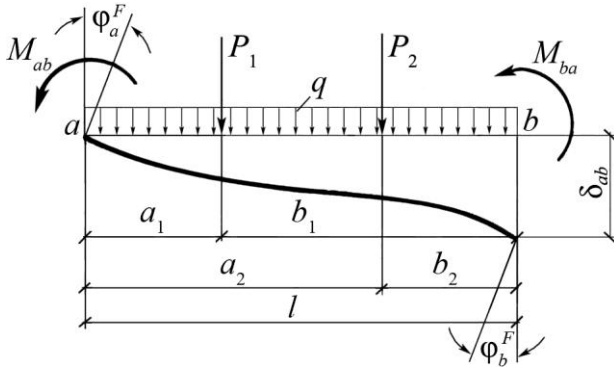


Рис. 2. Розрахункова схема стрижня  $ab$

$$M_{ab} = -\frac{EI}{l} \left[ 3\theta + 1 \right] \varphi_a + (3\theta - 1) \varphi_b - 6\theta \varphi_{ab} + M'_{ab},$$

$$Q_{ab} = -\frac{6EI\theta}{l^2} \left[ \varphi_a + \varphi_b - 2\psi_{ab} \right] + Q'_{ab},$$

де

$$M'_{ab} = -\sum_{n=1}^n \frac{P_n b_n}{2} \left\{ \left[ \left( 3 - \frac{2b_n}{l} \right) \theta - 1 \right] \frac{b_n}{l} + 1 - \theta \right\} \frac{ql^2}{12};$$

$$Q'_{ab} = -\sum_{n=1}^n \frac{P_n b_n}{l} \left\{ \left[ \left( 3 - \frac{2b_n}{l} \right) \theta - 1 \right] \frac{\theta b_n}{l} + 1 - \theta \right\} \frac{ql}{2};$$

$$\psi_{ab} = \frac{\delta_{ab}}{l_{ab}}; \quad \theta = \frac{1}{1 + \frac{12EI}{l^2 GF}};$$

$$F_1 = \frac{F}{\mu} = \frac{J^2}{\int_F \left( \frac{s}{b} \right)^2 dF}.$$

$$\mu_I = \mu_{xx} = \frac{F}{F_1}.$$

Коефіцієнт зсуву залежать від форми і розмірів перерізу стрижня.

$$\text{Наприклад: } \mu = 1,2, \mu_I = \frac{F_1}{F_{em}}.$$

Для двотавра, складеного з вузьких прямокутників

$$\mu = \frac{Fb_2^2}{I_x^2 \left[ 5b_1^2 h_1 + \frac{b_2}{h_2} (30b_1^2 h_1^2 + 10b_1 b_2 h_1 h_2 + b_2^2 h_2^2) \right]}.$$

Виконаємо розрахунок простої симетричної рами з косиметричним рівномірно-розподіленим навантаженням (рис. 3). Розрахункова схема рами для даного косиметричного навантаження має два невідомі: кут повороту вузла  $\varphi$  і кут

перекоосу стояка,  $\psi$   $\psi = \frac{\delta}{H}$ .

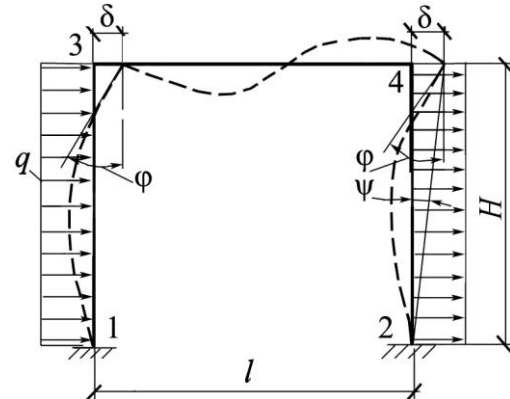


Рис. 3. Розрахункова схема рами

Складемо систему рівнянь для рами.

$$\begin{cases} M_{31} + M_{34} = 0 \\ Q_{13} + Q_{24} - \sum W = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Виразимо зусилля через невідомі:

$$M_{31} = -\frac{EI}{H} \left[ 3\theta + 1 \right] \varphi_3 - 6\theta \psi_{31} - \frac{qH^2}{12};$$

$$M_{34} = -\frac{EI}{l} \left[ 3\theta + 1 \right] \varphi_3 + (3\theta - 1) \varphi_4 - 0 + 0;$$

$$Q_{13} = -\frac{6EI\theta}{H^2} \left[ \varphi_3 + \varphi_4 - 2\psi_{13} \right] + \frac{qH}{2};$$

$$\sum W = -2qH;$$

$$Q_{24} = -\frac{6EI\theta}{H^2} \left[ \varphi_3 + \varphi_4 - 2\psi_{24} \right] + \frac{qH}{2};$$

$$\varphi \equiv \varphi_3 = \varphi_4; \quad \psi \equiv \psi_{31} = \psi_{24}.$$

Рівняння рівноваги (1) набудуть вигляду:

$$\begin{cases} -EI \left[ 3\theta \left( \frac{1}{H} + \frac{2}{l} \right) + \frac{1}{H} \right] \varphi + \frac{6EI}{H} \theta \varphi - \frac{qH^2}{12} = 0; \\ -\frac{12EI}{H^2} \theta \varphi + \frac{24EI}{H^2} \theta \psi - qH = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, отримаємо:

$$\varphi = \frac{qH^2}{6EI \left( \frac{6\theta}{l} + \frac{1}{H} \right)};$$

$$\psi = \frac{qH^2}{24EI} \left( \frac{2l}{6\theta + \frac{l}{H}} + \frac{H}{\theta} \right); \quad (2)$$

З метою забезпечення достовірності отриманих результатів (2) виконаємо канонічний розв'язок заданої рами методом переміщень при значенні  $\theta = 1$  (без урахування зсуву) за алгоритмом, представленим у [5], тобто виконуємо контрольну перевірку. Провівши аналіз отриманих розв'язків переконуємося, що їх результати повністю співпадають.

Визначимо моменти рами та побудуємо їх епюри (рис. 4):

$$M_{31} = M_{42} = -\frac{EI}{H} \left[ \left( \theta + 1 \right) \frac{qH^2}{6EI \left( \frac{6\theta}{l} + \frac{1}{H} \right)} - 6\theta \frac{qH^2}{24EI} \left( \frac{2l}{6\theta + \frac{l}{H}} + \frac{H}{\theta} \right) - \frac{qH^2}{12} \right] = \frac{qH^3}{6H+l} \times$$

$$\times \left[ 1 + \frac{l}{6H} - \frac{l}{H \left( 6\theta + \frac{l}{H} \right)} - \frac{l^2}{6H^2 \left( 6\theta + \frac{l}{H} \right)} \right];$$

$$M_{13} = -\frac{EI}{H} \left[ \left( \theta - 1 \right) \frac{qH^2}{6EI \left( \frac{6\theta}{l} + \frac{1}{H} \right)} - 6\theta \frac{qH^2}{12EI \left( \frac{6\theta}{l} + \frac{1}{H} \right)} - \frac{qH^3}{4EI} \right] + \frac{qH^2}{12} =$$

$$= \frac{qH^2}{3} + \frac{qHl}{6 \left( 6\theta + \frac{l}{H} \right)};$$

або

$$M_{13} = \frac{qH^2(4H+l)}{2(6H+l)} \left[ \frac{2 \left( 6 + \frac{l}{H} \right)}{3 \left( 4 + \frac{l}{H} \right)} + \frac{l \left( 6 + \frac{l}{H} \right)}{3H \left( 6\theta + \frac{l}{H} \right) \left( 4 + \frac{l}{H} \right)} \right];$$

Прийнявши  $k = \frac{l}{H}$  отримаємо

$$M_{31} = M_{42} = \frac{qH^3}{6H+l} \left[ 1 - \frac{k(1-\theta)}{6\theta+k} \right];$$

$$M_{13} = \frac{qH^2(4H+l)}{2(6H+l)} \left[ 1 + \frac{2k(1-\theta)}{(4+k)(6\theta+k)} \right]. \quad 3)$$

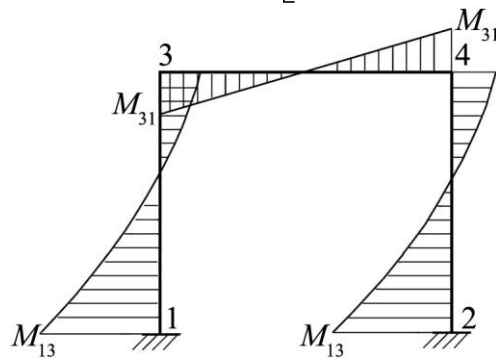


Рис. 4. Епюра моментів рами

Знаходимо значення перерізуючих сил та будуємо їх епюру (рис. 5).

$$Q_{13} = -\frac{6EI\theta}{H^2} \left[ \frac{qH^2}{6EI \left( \frac{6\theta}{l} + \frac{1}{H} \right)} - \frac{qH^2}{6EI \left( \frac{6\theta}{l} + \frac{1}{H} \right)} - \frac{2qH^3}{24EI\theta} \right] + \frac{qH}{2} = qH;$$

$$Q_{31} = -\frac{6EI\theta}{H^2} \left[ \varphi + \psi - 2\psi \right] = -\frac{qH}{2};$$

Перша складова аналогічна  $Q_{13}$  і дорівнює  $\frac{qH}{2}$ , тому

$$Q_{13} = \frac{qH}{2} - \frac{qH}{2} = 0;$$

$$Q_{34} = -\frac{6EI\theta}{l^2} 2\varphi = -\frac{12EI\theta H^2}{l^2 6EI \left( \frac{6\theta}{l} + \frac{1}{H} \right)} =$$

$$= -\frac{2qH^2\theta}{l \left( \frac{6\theta}{l} + \frac{1}{H} \right)};$$

або

$$Q_{34} = -\frac{2qH^3}{6EI + l^2} \left[ 1 - \frac{k(1-\theta)}{6\theta + k} \right];$$

$$Q_{24} = Q_{13} = qH;$$

$$Q_{42} = Q_{31} = 0.$$

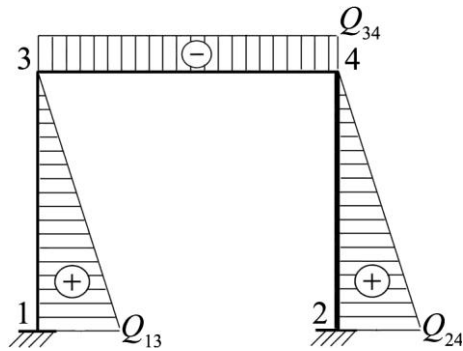


Рис. 5. Епюра перерізуючих сил

З метою ще одної перевірки достовірності отриманих результатів рама розраховувалася і за методом сил, без урахування зсуву, при  $\theta = 1$  і отримані епюри моментів та перерізуючих сил порівнювалися відповідно з рис. 4 і рис. 5.

Для дослідження впливу деформації зсуву на величини зусиль і переміщень в даній рамі побудуємо графіки значень найбільшого моменту  $M_{13}$ , поперечної сили  $Q_{34}$  та незалежного зміщення вузлів рами  $\delta$  при різних значеннях  $\theta$ , тобто побудуємо графіки функцій:

$$M_{13} = f_1(\theta);$$

$$Q_{34} = f_2(\theta);$$

$$\delta = f_3(\theta).$$

Перетворимо формулу (3) до наступного виду:

$$M_{13} = \frac{qH^2(4H+l)}{2(6H+1)} \eta_M(\theta),$$

$$\text{де } \eta_M(\theta) = 1 + \frac{2k(1-\theta)}{(4+k)(6\theta+k)}.$$

Побудуємо графіки функції  $\eta_M(\theta) = f(\theta)$ , для різних значень  $k$  (рис.6)

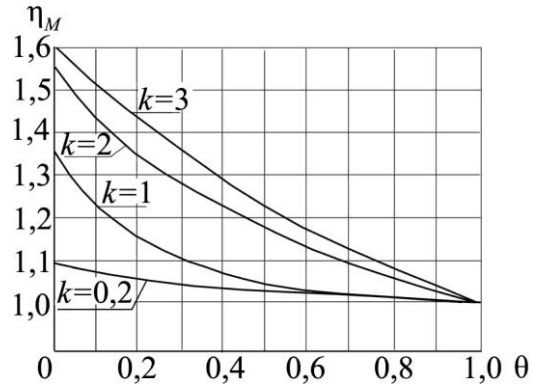


Рис. 6. Графіки функції  $\eta_M = f(\theta)$ , для різних значеннях  $k$

Аналогічно для поперечної сили отримаємо:

$$Q_{34} = -\frac{2qH^3}{6HI + l^2} \eta_Q(\theta),$$

$$\text{де } \eta_Q(\theta) = 1 - \frac{k(1-\theta)}{6\theta + k}.$$

Графіки функції  $\eta_Q = f(\theta)$ , представлено на рис. 7.

Знаючи кут перекошу стояка  $\psi$  знайдемо зміщення вузлів рами  $\delta$

$$\delta_{13} = \frac{qH^3}{24EI} \left[ \frac{2l}{6\theta + \frac{l}{H}} + \frac{H}{\theta} \right] = \frac{qH^4}{24EI} \times$$

$$\times \left[ \frac{2 \frac{l}{H} \theta + 6\theta + \frac{l}{H}}{\theta(6\theta + \frac{l}{H})} \right];$$

або

$$\delta = \frac{qH^4(2H+l)}{8EI(6H+l)} \eta_\delta(\theta)$$

$$\text{де } \eta_\delta(\theta) = \frac{(2\theta+k)(6+k)}{\theta(6\theta+k)(2+k)}.$$

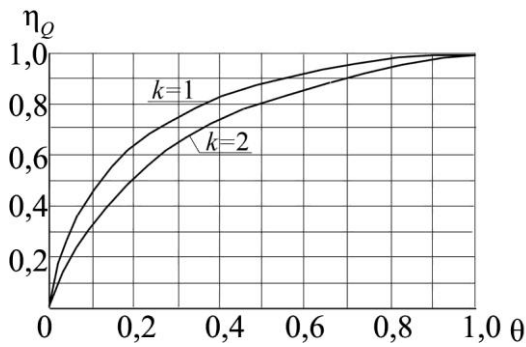


Рис. 7. Графіки функції  $\eta_Q = f(\theta)$

Обчислення функції  $\eta_\delta$  виконуємо при  $k = 1$ , так як при значеннях  $k = 2$  і  $k = 3$  графік майже не змінюється. Графік функції  $\eta_\delta = f(\theta)$ , представлено на рис. 8.

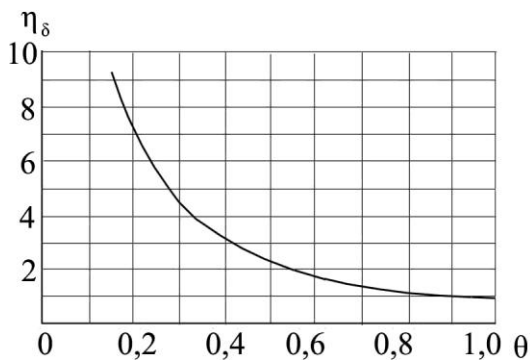


Рис. 8. Графік функції  $\eta_\delta = f(\theta)$

### Висновки

Виконавши функціональний аналіз за отриманими результатами можна зробити наступні висновки:

1. Деформації зсуву у більшій мірі впливають на переміщення ніж на внутрішні зусилля.

### Література

1. Лехницький С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 415с.
2. Семенов П.И. Расчет прочности и деформативности анизотропных тонкостенных стержней открытого профиля. –К.: Вища школа, 1974, 184 с.
3. Цихановський В.К., Козловець С.М., Костира Н.О. Оптимізація форми і структури великопрогонових оболонкових систем з обмеженнями за міцністю.

2. Вплив деформації зсуву більше проявляється на низьких рамах при  $k = 3$ , ніж на високих, тобто деформації зсуву пропорційні погонній жорсткості стрижневих елементів рами.

3. Деформації зсуву при розрахунках рам необхідно враховувати (маючи на увазі уточнення величини внутрішніх зусиль при розрахунках на міцність на величину більше 5%), коли для заданого стрижня маємо величину  $\theta$  у межах 0,2 для низьких рам при  $k = 2 - 3$ , або у межах  $\theta = 0,2 - 0,4$  при  $k = 1$ , або у межах  $\theta = 0,2 - 0,8$  при  $k = 2 - 3$  і вище.

Отже, при розрахунках рам на міцність деформації зсуву потрібно враховувати при низьких рамах, коли  $\theta \leq 0,8$ . Коли ж значення  $\theta > 0,8$ , при розрахунках на міцність деформації зсуву можна не враховувати.

4. За рахунок деформації зсуву перерізуючі зусилля в незавантажених стрижнях рами зменшуються, причому швидше ніж збільшується момент в небезпечному перерізі рами.
5. Для уточнення зміщень рами при розрахунках, особливо при використанні тонкостінних стрижнів, коли значення  $\theta \leq 0,75$ . деформації зсуву необхідно враховувати для всіх високих і низьких рам при  $k = 0,2 - 3$ .

//Промислове будівництво та інженерні споруди. Вип.3, 2009. – К.: ВАТ УкрНДІпроектсталь-конструкція с. 6-10.

4. Корноухов Н.В. Расчет сложных рам по методу перемещений с учетом деформаций сдвига и ширины стержней //Научные труды КИСИ, В.12. – К.: КИСИ, 1959.
5. Баженов В.А., Гранат С.Я., Шишов О.В. //Будівельна механіка. –К.: КНУБА, 2000. – 584 с.